

Table des matières

1	Glossaire	4
2	Notation	5
2.1	Ensemble	5
2.2	Graphe	5
3	Terminologie	7
3.0.1	Joindre (<i>join</i>)	7
3.0.2	Une extrémité (<i>endvertice</i> ou <i>endpoint</i>)	7
3.0.3	Incident(e) (<i>incident</i>)	7
3.0.4	Adjacent (adjacent)	7
3.0.5	Voisin (<i>neighbor</i>)	7
4	Définition	8
4.1	Graphes et digraphes	8
4.1.1	Un graphe (<i>graph</i>)	8
4.1.2	L'ensemble des sommets (<i>vertex set</i>)	8
4.1.3	L'ensemble des arêtes (<i>edge set</i>)	8
4.1.4	Un sommet, ou point, ou noeud (<i>vertex</i> , <i>point</i> , ou <i>node</i>)	8
4.1.5	Une arête, ou arc (<i>edge</i> ou <i>arc</i>)	8
4.1.6	Un graphe simple (<i>simple graph</i>)	9
4.1.7	Un multigraphe (<i>multigraph</i>)	9
4.1.8	Un digraphe ou graphe orienté (<i>digraph</i> ou <i>directed graph</i>)	9
4.1.9	Deux sommets adjacents (<i>adjacent vertices</i>)	9
4.1.10	Des arêtes adjacentes (<i>adjacent edges</i>)	9
4.1.11	Le voisinage ou voisinage ouvert (<i>neighbourhood</i> ou <i>open neighbourhood</i>)	9
4.1.12	Le voisinage fermé (<i>close neighbourhood</i>)	9
4.1.13	Un sommet isolé (<i>isolated vertex</i>)	10
4.1.14	Le degré ou la valence (<i>degree</i> ou <i>valence</i>)	10
4.1.15	L'ordre d'un graphe (<i>order</i>)	10
4.1.16	La taille d'un graphe (<i>size</i>)	10
4.1.17	Le complément d'un graphe (<i>complement</i>)	10
4.2	Graphes particulier	11
4.2.1	Graphe nul (<i>null graph</i>)	11
4.2.2	Graphe trivial (<i>trivial graph</i>)	11
4.2.3	Graphe vide d'un graphe (<i>empty graph</i>)	11

4.2.4	Graphe vide à n -sommets (<i>empty n-graph</i>)	11
4.2.5	Un chemin (<i>path</i>)	11
4.2.6	Un cycle (<i>cycle</i>)	11
4.2.7	Graphe complet (<i>complete graph</i>)	12
4.2.8	Graphe complet à n sommets (<i>complete n-graph</i>)	12
4.2.9	Graphe régulier (<i>regular graph</i>)	12
4.2.10	Graphe k -régulier (<i>k-regular graph</i>)	12
4.2.11	Graphe biparti (<i>bipartite graph</i>)	13
4.2.12	Graphe biparti-complet (<i>complet bipartite graph</i>)	13
4.2.13	Arbre (<i>tree</i>)	13
4.2.14	Forêt (<i>forest</i>)	13
4.3	Opérations sur les graphes	14
4.4	Chemin, cycle et connexité	16
4.4.1	Sommets indépendants (<i>independent vertices</i>)	16
4.4.2	Arêtes indépendants ou couplage (<i>independent edges</i> ou <i>matching</i>)	16
4.4.3	Couplage maximum (<i>maximum matching</i>)	16
4.4.4	Couplage complet (<i>complete matching from U to V</i> ou <i>U/V-saturating</i>)	16
4.4.5	Chemins indépendants (<i>independent paths</i> ou <i>internally disjoint</i>)	16
4.4.6	Chemin ou chaîne élémentaire (<i>path</i>)	16
4.4.7	Chaîne (<i>walk</i>)	17
4.4.8	La distance ou l'écart (<i>distance</i>)	17
4.4.9	Le diamètre (<i>diameter</i>)	17
4.4.10	Un parcours ou une chaîne simple (<i>Trail</i>)	18
4.4.11	Revouvrable (<i>traversable</i>)	18
4.4.12	Circuit ou cycle élémentaire (<i>circuit</i>)	18
4.4.13	Cycle (<i>cycle</i>)	18
4.4.14	Chemin/cycle/graphe hamiltonien (<i>hamiltonian path/cycle/graph</i>)	18
4.4.15	Parcours/circuit/graphe eulérien (<i>eulerian graph, Euler trail/tour</i>)	19
4.4.16	Tableau synoptique	19
4.5	Graphe partiel, sous-graphes et composante	20
4.5.1	Sous-graphe (<i>subgraph</i>)	20
4.5.2	Sous-graphe couvrant, ou graphe partiel (<i>spanning sub- graph</i>)	20
4.5.3	Sous-graphe induit (<i>subgraph induced by</i>)	20

4.5.4	Sous-graphe partiel (<i>proper subgraph</i>)	20
4.5.5	Clique ou sous-graphe complet (<i>clique</i> ou <i>complete subgraph</i>)	20
4.5.6	Stable ou sous-graphe vide (<i>empty subgraph</i>)	20
4.5.7	Connexe (<i>connected</i>)	20
4.5.8	Composante connexe (<i>component</i> ou <i>maximal connected subgraph</i>)	21
4.5.9	Point d'articulation (<i>cutvertex</i>)	21
4.5.10	Un ensemble d'articulation (<i>vertex-cut</i>)	21
4.5.11	La connectivité des sommets ou connectivité (<i>vertex connectivity</i> ou <i>connectivity</i>)	21
4.5.12	La connectivité des arêtes (<i>edge-connectivity</i>)	21
4.5.13	Un isthme ou un pont (<i>bridge</i>)	21
5	Bibliographie	22
6	Logiciels	23

Document produit par Sébastien CABOT dans le cadre du cours «Théorie des graphes» donné à l'Université de Montréal durant la session d'hiver 2008.

1 Glossaire

Français	Anglais
parcours/cycle eulérien	<i>Euler trail/cycle</i>
graphe eulérien	<i>eulerian graph</i>
arbre couvrant minimum	<i>economical spanning tree</i>
arborescence	<i>directed/ rooted tree</i>
graphe recouvrable	<i>traversable</i>
des arêtes adjacentes	<i>adjacent edges</i>
deux sommets adjacents	<i>adjacent vertices</i>
graphe est un arbre	<i>tree</i>
arc d'un graphe (orienté)	<i>directed edge</i>
arêtes d'un graphe	<i>graph edges</i>
graphe biparti(-complet)	<i>(complete) bipartite graph</i>
chaîne	<i>walk</i>
chemin	<i>path</i>
circuit	<i>circuit</i>
composante (connexe) d'un graphe	<i>graph (connected) component</i>
graphe complet	<i>complete graph</i>
graphe connexe/non-connexe	<i>connected/ disconnected graph</i>
couplage	<i>matching</i>
cycle	<i>cycle</i>
digraphe ou graphe orienté	<i>digraph</i> ou <i>directed graph</i>
degré ou valence d'un sommet	<i>vertex degree</i> ou <i>valence</i>
distance ou écart entre deux sommets	<i>distance</i>
extrémités d'une arête	<i>endpoints</i> ou <i>endvertice</i>
forêt	<i>forest</i>
graphe	<i>graph</i>
sommets d'un graphe	<i>graph vertices</i>
sommet incident à une ou des arêtes	<i>incident vertex</i>
arête(s) incidente(s) à un sommet	<i>incident edge</i>
arête incidente à deux sommets	<i>incident edge</i>
isthme	<i>bridge</i>
sommet isolé	<i>isolated vertex</i>
sommet pendant	{de degré 1}
noeud d'un graphe (orienté)	<i>graph node</i>
graphe r-partie	<i>r-partite graph</i>
points d'un graphe	<i>graph points</i>
parcours	<i>trail</i>
point d'articulation	<i>cutvertex</i>
graphe k-régulier	<i>k-regular graph</i>
sommet voisin d'un sommet	<i>neighbouring vertex</i>
voisinage (ouvert) d'un ou des sommets	<i>(open) neighbourhood</i>
voisinage fermé d'un ou des sommet	<i>close neighbourhood</i>

2 Notation

2.1 Ensemble

\emptyset	L'unique ensemble vide $\{\}$.
$x \in A$	L'élément x est dans l'ensemble A .
$x \notin A$	L'élément x n'est pas dans l'ensemble A .
$A \subseteq B$	L'ensemble A est un sous-ensemble de B (éventuellement $A = B$).
$A \subset B$	L'ensemble A est un sous-ensemble propre de B ($A \neq B$).
$\wp(A)$	L'ensemble puissance de A (la collection de tous les sous-ensembles).
$A \cup B$	L'union des ensembles A et $B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
$A \cap B$	L'intersection des ensembles A et $B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
$A - B$	L'ensemble A moins l'ensemble $B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
$ A $	La cardinalité de l'ensemble A . Aussi noté $\#A$ ou $\#\{a, \dots\}$.

2.2 Graphe

$G(V, E)$	Le graphe G , composé de l'ensemble des sommets V et de l'ensemble des arêtes E .
$V(G)$ ou V_G	L'ensemble des sommets du graphe G .
$E(G)$ ou E_G	L'ensemble des arêtes du graphe G .
$ G $ ou $n(G)$	L' ordre du graphe G (le nombre de sommets).
$e(G)$	La taille du graphe G (le nombre d'arêtes).
$u \sim v$	Le sommet u est adjacent (ou voisin) au sommet v .
$d_G(v)$	Dans le graphe G , le degré du sommet v (nombre de voisins de v).
$d(u, v)$	La distance entre les sommets u et v .
$\delta(G)$ ou δ_G	Le degré minimum dans le graphe G .
$\Delta(G)$ ou Δ_G	Le degré maximum dans le graphe G .
$\Gamma_G(v)$	Dans le graphe G , les sommets voisins au sommet v .
$\Gamma_G(v) \cup \{v\}$	Dans le graphe G , le voisinage fermé du sommet v .
$\Gamma_G(W)$	Dans G , les sommets voisins à l'ensemble de sommets W .
\overline{G}	Le complément du graphe $G = (V, E)$. REMARQUE : $\overline{G} = (V(G), V(G)^2 - E(G))$
G^*	Le graphe dual de G .
$H \subseteq G$	Le graphe H est un sous-graphe de G .
$G - v$	Effacer le sommet v du graphe G .
$G - uv$	Effacer l'arête uv du graphe G .
$G \cup v$	Ajouter le sommet v au graphe G .

$G \cup uv$	Ajouter l'arête uv au graphe G .
$G \cup H$	Union du graphe H et du graphe G .
$G + \{v\}$	Joindre le sommet v au graphe G .
$G + \{uv\}$	Joindre l'arête uv au graphe G .
$G + H$	Joindre le graphe H au graphe G .
G/xy	Dans le graphe G , contraction de l'arête xy .
G/A	Dans le graphe G , contraction de l'ensemble des sommets A .
$E_G(U, W)$	L'ensemble des arêtes qui joignent un sommets de U à un de W , où U et W sont deux sous-ensembles disjoints de $V(G)$.
K_n	Le graphe complet d'ordre n . REMARQUE : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes
$K_{n,m}$	Le graphe biparti-complet avec deux partitions de n et m sommets respectivement. REMARQUE : $n \times m$ arêtes
E_n	Le graphe vide E , n sommets et aucune arête. REMARQUE : Noté plus souvent $E_n = \overline{K_n}$
G^n	Un graphe G arbitraire de n sommets.
$G(m, n)$	Un graphe G arbitraire de m sommets et n arêtes.
$G[U]$	Le sous-graphe de G induit par l'ensemble de sommet $U \subseteq V(G)$.
$\kappa(G)$	La connectivité des sommets du graphe G .
$\lambda(G)$	La connectivité des arêtes du graphe G .
$H \prec G$	Le graphe H est un mineur de G .
C_n	Un cycle de n sommets et de longueur n .
P_n	Un chemin de n sommets.

3 Terminologie

3.0.1 Joindre (*join*)

Deux sommets sont **joint**s par une arête. Ou bien, une arête **joint** deux sommets.

Ex. 1) uv **joint** u et v .

Ex. 2) u et v sont **joint**s par uv .

3.0.2 Une extrémité (*endvertice* ou *endpoint*)

Les deux sommets joints par une arête sont les **extrémités** de cette dernière.

Ex. : u est une **extrémité** de uv .

3.0.3 Incident(e) (*incident*)

Un sommet et une arête sont **incidents**, lorsque que le sommet est une extrémité de l'arête.

Ex. 1) uv est **incidente** à u et v .

Ex. 2) u est **incident** à uv .

3.0.4 Adjacent (*adjacent*)

Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont joints par une arête.

Deux arêtes sont **adjacentes** lorsqu'elles ont exactement un sommet commun.

Ex. 1) u et v sont **adjacents**, si $uv \in E(G)$.

Ex. 2) uv et vw sont **adjacentes**.

Ex. 3) u est **adjacent** à l'ensemble de sommets W .

3.0.5 Voisin (*neighbor*)

Deux sommets **voisins** sont joints par une arête.

Exemple : Dans le graphe $G = (\{u, v\}, \{uv\})$, le sommet u est **voisin** du sommet v .

4 Définition

4.1 Graphes et digraphes

4.1.1 Un graphe (*graph*)

$$G = \mathbf{graphe} G = (V, E) \text{ où } E \subseteq V^2$$

1. Un **graphe** G est un couple ordonné (V, E) de deux ensembles disjoints V et E . On écrit $G = (V, E)$.
2. Chaque élément de l'ensemble V est un **sommet** tandis que chaque élément de l'ensemble E est une **arête**.
3. L'ensemble, E , des arêtes, est un sous ensemble de V^2 , composé de couples sans distinction sur l'ordre des éléments.
4. Un **graphe pair(impair)** contient uniquement des sommets de degré pair(impair).
5. $G = \mathbf{graphe} G = (V, E)$ où $E \subseteq V^2$

4.1.2 L'ensemble des sommets (*vertex set*)

$$V(G) = \mathbf{ensemble des sommets de } G = V$$

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, on note $V(G)$, l'ensemble des sommets du graphe G . On a $V(G) = V$.
2. Une notation alternative est V_G .

4.1.3 L'ensemble des arêtes (*edge set*)

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, on note l'ensemble de ses arêtes $E(G)$. On a $E(G) = E$.
2. Une notation alternative est E_G .

4.1.4 Un sommet, ou point, ou noeud (*vertex, point, ou node*)

1. On utilise plutôt le terme **noeud** pour un **sommet** dans un graphe est orienté.
2. $v = \mathbf{sommet} v \Leftrightarrow v \in V(G)$

4.1.5 Une arête, ou arc (*edge ou arc*)

1. On réserve le terme **arc** lorsqu'il s'agit d'une **arête** dans un graphe orienté.
2. $uv = \mathbf{arête} uv = [u, v] \Leftrightarrow uv \in E(G)$
3. $uv = \mathbf{arc} uv = (u, v) \Leftrightarrow uv \in E(G)$

4.1.6 Un **graphe simple** (*simple graph*)

1. Un **graphe simple** est un graphe sans boucle où il y a au plus une arête entre deux sommets.

4.1.7 Un **multigraphe** (*multigraph*)

1. Un **multigraphe** est un graphe qui peut contenir des boucles et plus d'une arête entre ses sommets.

4.1.8 Un **digraphe** ou **graphe orienté** (*digraph* ou *directed graph*)

1. Un **graphe orienté**, ou **digraphe**, est un graphe dont ses arêtes sont orientées.

4.1.9 Deux **sommets adjacents** (*adjacent vertices*)

1. Dans un graphe G , deux **sommets adjacents** $u, v \in V(G)$ sont joints par une arête.
2. $u \sim v \Leftrightarrow u$ **adjacent** à $v \Leftrightarrow uv \in E(G)$

4.1.10 Des **arêtes adjacentes** (*adjacent edges*)

1. Dans un graphe G , des **arêtes adjacentes** possèdent exactement une extrémité en commun.
2. uv **adjacente** à $vw \Leftrightarrow v \in \Gamma(u) \wedge v \in \Gamma(w)$
3. u_1v, u_2v, \dots, u_nv sont **adjacentes** $\Leftrightarrow v \in \bigcap_{i=1}^n \Gamma(u_i)$

4.1.11 Le **voisinage** ou **voisinage ouvert** (*neighbourhood* ou *open neighbourhood*)

1. Dans le graphe G , le **voisinage** ou **voisinage ouvert** d'un sommet v est l'ensemble des sommets adjacents à v .
2. $\Gamma_G(v) =$ **voisinage** de $v = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$
3. $\Gamma_G(U) =$ **voisinage** de l'ensemble de sommets $U \subseteq V(G) = \bigcup_{u \in U} \Gamma_G(u) = \{v \in V(G) \mid u \in U \text{ et } v \in E(G)\}$

4.1.12 Le **voisinage fermé** (*close neighbourhood*)

1. Dans le graphe $G = (V, E)$, le **voisinage fermé** du sommet v est l'ensemble des sommets adjacents à v plus le sommet v lui-même.
2. **voisinage fermé** de $v \Leftrightarrow \Gamma(v) \cup \{v\}$

4.1.13 Un **sommet isolé** (*isolated vertex*)

1. Dans un graphe, un sommet qui n'a aucun voisin est un **sommet isolé**.
2. **sommet isolé** $v \Leftrightarrow \Gamma(v) = \emptyset$

4.1.14 Le **degré** ou la **valence** (*degree* ou *valence*)

1. Le **degré** (ou **valence**) d'un sommet v est le nombre d'arêtes qui ont pour extrémité v , autrement dit le nombre de voisins de v .
2. $d_G(v) = \mathbf{degré}$ de $v = |\Gamma_G(v)|$

4.1.15 L'**ordre** d'un graphe (*order*)

1. L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
2. $|G| = \mathbf{ordre}$ de $G = |V(G)| = n$

4.1.16 La **taille** d'un graphe (*size*)

1. La **taille** d'un graphe est le nombre de ses arêtes.
2. $e(G) = \mathbf{taille}$ de $G = |E(G)| = m$

4.1.17 Le **complément** d'un graphe (*complement*)

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, son complément \overline{G} est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans \overline{G} si et seulement si ils ne le sont pas dans G .
2. $\overline{G} = \mathbf{complément}$ de $G = (V, V^2 - E)$

4.2 Graphes particulier

4.2.1 Graphe nul (*null graph*)

1. Un **graphe nul** est un graphe sans sommet et sans arête.
2. $K_0 = E_0 = \text{graphe nul} = (\emptyset, \emptyset)$

4.2.2 Graphe trivial (*trivial graph*)

1. Un **graphe trivial** est composé d'un seul sommet et d'aucune arête.
2. $K_1 = E_1 = \text{graphe trivial} = G(\{v\}, \emptyset)$

4.2.3 Graphe vide d'un graphe (*empty graph*)

1. Un **graphe vide**, est un graphe sans arête.
2. $\bar{K} = E = \text{graphe vide} = (V, \emptyset)$
3. REMARQUE : Pour éviter la confusion avec la notation de l'ensemble des arêtes E , on peut préfère utiliser la notation \bar{K} pour identifier un graphe vide.

4.2.4 Graphe vide à n -sommets (*empty n-graph*)

1. $\bar{K}_n = E_n = \text{graphe vide à } n\text{-sommets} = (\{v_1, \dots, v_n\}, \emptyset)$

4.2.5 Un chemin (*path*)

1. Deux signification possible à la notation P_n . Soit le n représente la longueur, alors $n+1$ est le nombre de sommets. Soit le n représente le nombre de sommets, alors $n-1$ est la longueur.
2. $P_n = \text{chemin de } n\text{-sommets} = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\})$

4.2.6 Un cycle (*cycle*)

1. Un cycle pair(impair) est de longueur pair(impair).
2. Un cycle pair est un graphe bipartie.
3. $C_n = \text{cycle de } n\text{-sommets} = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_nv_1, v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\})$
4. Un cycle de 3 sommets est un triangle.
5. Un cycle de 4 sommets est un carré.
6. Un cycle de 5 sommets est un pentagone. Etc.

4.2.7 Graphe **complet** (*complete graph*)

1. Dans un **graphe complet** toutes les paires de sommets sont jointes par une arête.
2. Le K est en l'honneur de KURATOWSKI, pionnier de la théorie des graphes.
3. $K = \text{graphe complet} = (V, \{uv \mid u, v \in V \wedge u \neq v\})$

4.2.8 Graphe **complet à n sommets** (*complete n -graph*)

1. Dans un **graphe complet K_n à n sommets**, il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.
2. Dans un **graphe complet K_n à n sommets**, le degré des sommets est $n - 1$.
3. Un **graphe complet K_n** est un graphe régulier, plus précisément un graphe $(n - 1)$ -régulier.
4. $K_n = \text{graphe complet}$ d'ordre $n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\})$

4.2.9 Graphe **régulier** (*regular graph*)

1. Un graphe est **régulier** si tout ses sommets ont le même degré.
2. G est **régulier** $\Leftrightarrow \forall u, v \in V(G), d_G(u) = d_G(v)$
3. G est **régulier** $\Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G)$

4.2.10 Graphe **k -régulier** (*k -regular graph*)

1. Un graphe est **k -régulier** ou **régulier de degré k** si tout ses sommet sont de degré k .
2. G **k -régulier** $\Leftrightarrow \forall v \in V(G), d_G(v) = k$
3. G **k -régulier** $\Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G) = k$
4. G 0-régulier est un graphe trivial
5. G 2-régulier est un graphe composé d'un ou plusieurs cycles.
6. G connexe et 0-régulier, graphe trivial d'un seul sommet.
7. G connexe et 1-régulier, graphe de 2 sommets et 1 arête.
8. G connexe de 2-régulier, le graphe est un cycle.
9. En particulier, on dit d'un graphe 3-régulier qu'il est **cubique**. Puisque la somme des degrés d'un graphe est impair, un graphe 3-régulier doit avoir un nombre pair de sommet, de même pour les autres graphes k -régulier avec k impair.
10. Un graphe k -régulier de $(k + 1)$ sommets et un graphe complet K_{k+1} .
11. G **3-régulier** $\Leftrightarrow G$ **cubique** $\Leftrightarrow \forall v \in V(G), d_G(v) = 3$

4.2.11 Graphe **biparti** (*bipartite graph*)

1. Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V et W tel que chaque arête de E a une extrémité dans V et l'autre dans W .
2. G est **biparti** $\Leftrightarrow V(G) = V \cup W \wedge V \cap W = \emptyset \wedge \forall vw \in E(G), v \in V, w \in W$
3. G **biparti** $= ((V - W) \cup (W - V), \{vw \mid v \in V \wedge w \in W\})$

4.2.12 Graphe **biparti-complet** (*complet bipartite graph*)

1. Un graphe $K_{n,m}$ est **biparti-complet** si chaque sommets dans une partition est joint par une arête à chaque sommet dans l'autre partition.
2. $K_{n,m} = K_{n,m}$ est **biparti-complet** $= \overline{K_n} + \overline{K_m}$

4.2.13 **Arbre** (*tree*)

1. Un graphe sans cycle et connexe est un **arbre**
2. $m = n - 1$
3. Pour $n \geq 2$ l'arbre possède au moins deux sommet de degré 1 (deux feuilles).

4.2.14 **Forêt** (*forest*)

1. Un graphe sans cycle est une **forêt**.
2. On a $m \leq n - 1$, avec l'égalité ssi la forêt est formée d'un seul arbre.
3. Chaque composante de la forêt est un arbre.
4. Une forêt F est une union disjointe d'arbres T_i .

$$F = \bigcup_{i=1}^n T_i$$

4.3 Opérations sur les graphes

1. **Complément** de G

$$\overline{G} = (V(G), V(G)^2 - E(G))$$

2. Dans $G = (V, E)$, **contraction** de l'arête uv

$$G/uv = (V - \{u\}, E(G - u) \cup \{vu' \mid u' \in \Gamma(u) \text{ et } u' \neq v\})$$

3. Dans $G = (V, E)$, **contraction** de l'ensemble des sommets $V' \subset V$
(*contraction of V' to a vertex*)

$$G/V' = (V - V' \cup \{x\}, E(G - V') \cup \{xy \mid y \in (\bigcup_{v \in V'} \Gamma_G(v) - V')\})$$

4. **Effacer le sommet** v du graphe G (*deleting a vertex*) lorsque $v \in V(G)$

$$G - v = G - \{v\} = G[V(G) - \{v\}] = (V(G) - \{v\}, E(G) - \{uv \in E(G) \mid u \sim v\})$$

5. **Effacer les sommets** de V' du graphe G (*deleting vertices*) lorsque $V' \subseteq V(G)$

$$G - V' = G[V(G) - V'] = (V(G) - V', \{uv \in E(G) \mid u, v \notin V'\})$$

6. **Effacer l'arête** uv du graphe G (*deleting an edge*) lorsque $uv \in E(G)$

$$G - uv = G - \{uv\} = (V(G) - \{u, v\}, E(G) - uv)$$

7. **Effacer les arêtes** de E' du graphe G (*deleting edges*) lorsque $E' \subseteq E(G)$

$$G - E' = (V(G) - \{u, v \mid uv \in E'\}, E(G) - E')$$

8. **Ajout d'un sommet** v au graphe G (*adding vertex*) lorsque $v \notin V(G)$

$$G \cup v = G \cup \{v\} = (V(G) \cup \{v\}, E(G))$$

9. **Ajout des sommets** dans V' au graphe G (*adding vertices*) lorsque $V' \cap V(G) = \emptyset$

$$G \cup V' = (V(G) \cup V', E(G))$$

10. **Ajout d'une arête** uv au graphe G (*adding edge*) lorsque $uv \notin E(G)$

$$G \cup uv = G \cup \{uv\} = (V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

11. **Ajout des arêtes** dans E' au graphe G (*adding edges*) lorsque $E' \cap E(G) = \emptyset$

$$G \cup E' = (V(G), E(G) \cup E')$$

12. **Joindre un sommet** v au graphe G (*join of v to G*) lorsque $v \notin V(G)$

$$G + v = G + \{v\} = (V(G) \cup \{v\}, E(G) \cup \{uv \mid u \in E(G)\})$$

13. **Joindre les sommets** de V' au graphe G (*joining vertices*) lorsque $V' \cap V(G) = \emptyset$

$$G + V' = (V(G) \cup V', E(G) \cup \{vv' \mid v \in V(G), v' \in V'\})$$

14. **Joindre un graphe** G' à un graphe G (*join $G + G'$*)

$$G + G' = (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G') \cup \{vv' \mid v \in V(G), v' \in V(G')\})$$

4.4 Chemin, cycle et connexité

4.4.1 Sommets indépendants (*independent vertices*)

1. Un **ensemble indépendant de sommets** dans un graphe est un ensemble où tous les sommets sont mutuellement non-adjacents. (aucun de ses sommets sont joints par une arête).
2. V **indépendants** $\Leftrightarrow \forall v \in V, \Gamma(v) \cap V = \emptyset$
3. $W \subset V(G)$ est indépendant $\Leftrightarrow G[W]$ est un stable (graphe vide)

4.4.2 Arêtes indépendants ou couplage (*independent edges* ou *matching*)

1. Les arêtes d'un ensemble E sont indépendantes si elles sont toutes non-adjacentes (pas de sommet commun).
2. E **indépendants** $\Leftrightarrow \forall uv \in E, \forall ab \in E \setminus \{uv\}, a \neq b \neq u \neq v$

4.4.3 Couplage maximum (*maximum matching*)

1. Un couplage avec le nombre maximum d'arêtes.

4.4.4 Couplage complet (*complete matching from U to V* ou *U/V-saturating*)

1. Dans un graphe G biparti, avec les parties U et W , il y a un **couplage complet** M de U à V si tous les sommets de U sont présents dans le couplage M .

4.4.5 Chemins indépendants (*independent paths* ou *internally disjoint*)

1. Un ensemble de chemins $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est indépendant si les seuls sommets communs entre deux chemins P_i et P_j sont leurs extrémités.
2. P_1, P_2, \dots, P_n chemins x - y **indépendants** $\Leftrightarrow V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}, i \neq j$

4.4.6 Chemin ou chaîne élémentaire (*path*)

1. Un **chemin** P est un graphe $P(V, E)$ de la forme
 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
 $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$
 REMARQUE : Aucun répétition de sommet, aucune répétition d'arête.
2. P est un **chemin** de v_1 à v_n ou un **chemin** v_1 - v_2 .
3. La **longueur** du chemin est son nombre d'arête.

$$\text{longueur de } P = e(P) = |E(P)| = n - 1$$

4. TERMINOLOGIE : Les **extrémités** du chemin sont v_1 et v_2 .

5. NOTATION : Le **chemin** P se note $v_1v_2\dots v_n$.
6. NOTATION : P_l est un chemin arbitraire de longueur l .

$$\text{chemin } P = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{v_i\}, \bigcup_{1 \leq i < n} \{v_i v_{i+1}\} \right)$$

4.4.7 Chaîne (*walk*)

1. Une **chaîne** W dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes, commençant et se terminant par un sommet.
REMARQUE : Répétition de sommets possible et répétition d'arêtes possible.
2. La chaîne $W = \langle x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_{n-1}, e_n, x_n \rangle$ où $e_i = x_{i-1}x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
3. La chaîne W a une **longueur** de n (nombre d'arêtes dans la chaîne).
4. Si la chaîne a une **longueur paire** (impaire) on dit que c'est une **chaîne paire** (impaire).
5. Si $x_0 = a$ et $x_n = b$ alors on dit que la chaîne W **relie** a et b .
6. Un sommet v est **atteignable** du sommet u , s'il existe une chaîne $u-v$.
7. Une chaîne du sommet x_0 au sommet x_n est aussi appelé «**chaîne** x_0-x_n ».
8. Si $x_0 = x_n$, alors il s'agit d'une chaîne fermée. Autrement, si $x_0 \neq x_n$, alors il s'agit d'une chaîne ouverte.
9. Une chaîne doit contenir au moins une arête, sinon il s'agit d'une **chaîne trivial**, elle est composée d'un seul sommet et est de longueur 0.
10. NOTATION : La chaîne W se note $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$.
11. NOTATION ALTERNATIVE : La chaîne W peut aussi se noter $\langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$.
12. Les chaînes $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$ et $\langle x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 \rangle$ sont les mêmes.
13. Si l'on dit «*la chaîne la plus courte*», la **chaîne** est nécessairement un **chemin** (aucune répétition de sommet). Il serait donc plus juste dire «*le chemin le plus court*».

4.4.8 La distance ou l'écart (*distance*)

1. La **distance** $d(u, v)$ entre deux sommets u et v dans un graphe est la longueur du chemin $u-v$ le plus court qui les relie, si elle existe. Sinon, la distance est $d(u, v) = \infty$.
2. $d(u, v) = \min\{l \mid \text{il existe un chemin } u-v \text{ de longueur } l\}$
3. $\vec{d}(u, v)$, la **distance orientée**, longueur du chemin orienté le plus court.

4.4.9 Le diamètre (*diameter*)

1. Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux de ses sommets.
2. $\text{dia}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$

4.4.10 Un **parcours** ou une **chaîne simple** (*Trail*)

1. Une **parcours** P dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes, où toutes les arêtes sont distinctes.
REMARQUE : Répétition de sommets possible et pas de répétition d'arêtes.
2. Le parcours $P = x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, \dots, e_{n-1}, x_n$ où $e_i = x_i x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $e_i \neq e_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$
3. P est un parcours de longueur $n-1$.
4. P est un parcours x_1-x_n .
5. Notation : Le parcours P se note $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$.

4.4.11 **Revouvrable** (*traversable*)

1. Un graphe G est **recouvrable** s'il existe un parcours passant par tous ses sommets.
2. TERMINOLOGY : Dans un graphe revouvrable, on dit qu'il y a **recouvrement des arêtes** par un parcours.
3. Synonyme de **parcours eulérien**.

4.4.12 **Circuit** ou **cycle élémentaire** (*circuit*)

1. Un **circuit** C dans un graphe est un parcours dont les extrémités coïncides.
REMARQUE : Répétition de sommets possible et aucune de répétition d'arêtes.

4.4.13 **Cycle** (*cycle*)

1. Un **cycle** C dans un graphe est un chemin dont les extrémités coïncides.
REMARQUE : Pas de répétition de sommets et pas de répétition d'arêtes.
2. $C_l =$ cycle arbitraire de longueur l
3. C_3 est un triangle, C_4 est un quadrilatère, C_5 est un pentagone, et ainsi de suite.
4. Un cycle est pair(impair) si sa longueur est pair(impair).
5. Un graphe sans cycle est **acyclique** (*acyclic*)

4.4.14 **Chemin/cycle/graphes hamiltonien** (*hamiltonian path/cycle/graph*)

1. Un cycle qui contient tous les sommets d'un graphe est un **cycle hamiltonien**.
2. Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui contient tous les sommets d'un graphe.
3. Un graphe qui a un cycle hamiltonien est un **graphe hamiltonien**.

4.4.15 Parcours/circuit/graphe eulérien (*eulerian graph, Euler trail/tour*)

1. Un circuit qui contient toutes les arêtes d'un graphe est un **circuit eulérien**.
2. Un **parcours eulérien** est un parcours qui contient toutes les arêtes d'un graphe.
3. Un graphe avec un circuit eulérien est un **graphe eulérien**.

4.4.16 Tableau synoptique

	Répétition d'arêtes		Graphe (avec circuit/cycle)
	OUI	NON	
Rép. de sommets OUI	chaîne (ouverte) <i>(open walk)</i> chaîne (ouverte) <i>(close walk)</i>	parcours (<i>trail</i>) circuit (<i>circuit</i>)	eulérien (toutes les arêtes)
Rép. de sommets NON	—	chemin (<i>path</i>) cycle (<i>cycle</i>)	hamiltonien (tous sommets)

4.5 Graphe partiel, sous-graphes et composante

4.5.1 Sous-graphe (*subgraph*)

1. Un graphe H dont tous ses sommets et toutes ses arêtes sont dans G est un sous-graphe de G .
2. On dit que G contient H .
3. $H \subseteq G \Leftrightarrow H$ **sous-graphe** de $G \Leftrightarrow V(G') \subseteq V(G) \wedge E(G') \subseteq E(G)$

4.5.2 Sous-graphe couvrant, ou graphe partiel (*spanning subgraph*)

1. On obtient G' un **sous-graphe couvrant** de G en enlevant une ou plusieurs arêtes du graphe G .
2. **sous-graphe couvrant** $G' = (V(G), E' \subset E(G))$
3. **Graphe partiel** est un terme propre à la terminologie française.

4.5.3 Sous-graphe induit (*subgraph induced by*)

1. On obtient le **sous-garphe induit** de G par $A \subseteq V(G)$ en supprimant les sommets du graphe G qui ne sont pas dans A , ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.
2. $G[A] =$ **sous-graphe induit** de G par $A = (A, \{uv \mid u, v \in A \text{ et } u, v \in E(G)\})$

4.5.4 Sous-graphe partiel (*proper subgraph*)

1. On obtient un **sous-graphe partiel** de G en enlevant une ou plusieurs arêtes d'un sous-graphe de G .
2. **sous-graphe partiel** $G' = (V(G) - V', E(G) - E' - \{uv \mid u \in V' \vee v \in V'\})$

4.5.5 Clique ou sous-graphe complet (*clique* ou *complete subgraph*)

1. On appelle une **clique** G' de G , un sous-graphe complet de G .
2. **clique** $G' = (V(G) - V', \{uv \mid u, v \notin V' \wedge uv \in V(G)\})$

4.5.6 Stable ou sous-graphe vide (*empty subgraph*)

1. On appelle **stable** G' de G , un sous-graphe de G sans arêtes.
2. **stable** $G' = (V(G) - V', \emptyset)$

4.5.7 Connexe (*connected*)

1. Un graphe est **connexe** si pour chacune des paires, u et v , de sommets distincts, il existe un chemin de u à v .

4.5.8 Composante connexe (*component ou maximal connected subgraph*)

1. Une **composante** d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximale de G .
2. **composante connexe de** $G = (????, ????)$

4.5.9 Point d'articulation (*cutvertex*)

1. Un **point d'articulation** est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

4.5.10 Un ensemble d'articulation (*vertex-cut*)

1. Dans un graphe G , un **ensemble d'articulation** $U \subset V(G)$ est un ensemble dont la suppression dans G entraîne un graphe non-connexe.

4.5.11 La connectivité des sommets ou connectivité (*vertex connectivity ou connectivity*)

1. La connectivité d'un graphe G est le nombre minimum de sommet à effacer pour que G devienne non-connexe ou soit réduit à un sommet unique.
2. Un graphe est k -connexe, si sa connectivité $\kappa(G) \geq k$.

4.5.12 La connectivité des arêtes (*edge-connectivity*)

1. La **connectivité des arêtes** d'un graphe connexe G est le nombre minimum d'arêtes à effacer pour que G ne soit plus connexe.
2. Un graphe est k -arête-connexe, si sa connectivité $\lambda(G) \geq k$.

4.5.13 Un isthme ou un pont (*bridge*)

1. Un **isthme** est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

5 Bibliographie

- Seymour LIPSCHUTZ et Marc LIPSON (2007).
Discrete Mathematics, 3^e édition, McGraw-Hill, 474 pages.
Page 154 à 228.
ISBN 0-07-147038-7
- Seymour LIPSCHUTZ (1990).
Mathématiques discrètes, Paris, McGraw-Hill, 248 pages.
Page 82 à 131.
ISBN 2-7042-1233-3
- Kenneth H. ROSEN (2006).
Discrete Mathematics and Its Applications, 6^e édition, McGraw-Hill,
910 pages.
ISBN 0073312711
- Kenneth H. ROSEN (1999).
Mathématiques discrètes, Chenelière.
ISBN 2894611765
- Douglas B. WEST (2001).
Introduction to Graph Theory, 2^e édition, Prentice-Hall, 588 pages.
ISBN 0-13-014400-2
- Jean-Claude FOURNIER (2006).
Théorie des graphes et applications, 1^{re} édition, Paris, Lavoisier, 288 pages.
ISBN 2-7462-1247-1
- Claude BERGE (1983).
Graphes, 3^e édition, Paris, Bordas, 400 pages.
ISBN 2-04-015555-4
- Béla BOLLOBÁS (2002).
Modern Graph Theory, 3^e impression, New York, Springer, 408 pages.
ISBN 0-387-98488-7
- W.D. Wallis (2007)
A Beginner's Guide to Graph Theory, 2^e édition, Boston-Basel-Berlin,
Birkhäuser, 260 pages.
ISBN 978-0-8176-4484-0
- Jonathan L. GROSS et Jay YELLEN (2006).
Graph Theory and Its Applications, 2^e édition, Floride,
Chapman & Hall/CRC, 800 pages.
ISBN 158488505X

– Didier MÜLLER, (2008).

Introduction à la théorie des graphes, 44 pages.

<http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/coursgraphes.pdf>

(11 février 2008)

6 Logiciels

– yED par yWorks. http://www.yworks.com/en/products_yed_about.htm

– Tulip par David AUBER. <http://www.tulip-software.org/>